なお，保存系カオス，量子系カオス，多自由度カオスおよび時空カオスにはそれぞれ特有な問題があるがここでは触れなかった。

文　献

1) H. Fujisaka: Prog. Theor. Phys. **71** (1984) 513.
2) H. Fujisaka and M. Inoue: Prog. Theor. Phys. **74** (1985) 20.
3) M. Inoue and H. Fujisaka: Preprint (*Analytic Properties of Characteristic Exponents for Chastic Dynamical Systems*).
4) H. G. E. Hentschel and I. Procaccia: Physica **8D** (1983) 435.
5) P. Grassberger: Phys. Lett. **97A** (1983) 227.
6) T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia and B. I. Shraiman: Phys. Rev. **A33** (1986) 1141.
7) Y. Takahashi and Y. Oono: Prog. Theor. Phys. **71** (1984) 851.
8) H. Fujisaka and M. Inoue: Preprint. (*Statistical-thermodynamic Formalism of Self-Similarity*).

自己相似性の統計熱力学形式 II

慶大・理　　藤坂博一，井上政義

一次元定常列 $\{u_0, u_1, u_2, \cdots\}$ に対して，物理量 A_n が

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \mathrm{e}^{u_n} \tag{1}$$

を満すとき，A_n は自己相似的[1]であると呼ぶことにする。定常列 $\{u_0, u_1, u_2, \cdots\}$ は定常確率過程，或いは定常カオス過程から生成されるものとし，本研究は $n\to\infty$ での A_n の大局的ふるまいを調べることを目的とする。このような自己相似性は fractal sets の理論,[2] 発達した乱流における速度構造関数の理論,[3] 或いは筆者による相似指数関数の理論[4),5)]にみられる。

A_n の統計的性質を調べるのにそのモーメント $M_n(q) \equiv \langle [A_n]^q \rangle$ (q : real) を考える。(1)を解くと

$$A_n = A_0 \exp(nZ_n), \tag{2}$$

ただし,

$$Z_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} u_j \tag{3}$$

はスケール n にわたる平均値である。 $\ln A_n$ が n に関して extensive であることを用いると,

$$\lambda_q = \frac{1}{q} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln M_n(q) \tag{4}$$

は definite な値を持ち, $n \to \infty$ で

$$M_n(q) \sim \exp(q\lambda_q n) \tag{5}$$

なる漸近形を持つ。一方, 十分大きな n に対して Z_n は揺いでいるが, この揺ぎは n を増加させるにつれ次第に減少し, $n=\infty$ では一定値 Z_∞ に収束し, もはや揺ぎはない。$n\to\infty$ での Z_n の揺ぎはその確率分布関数 $\rho_n(\alpha')$ によって測られるが, それは一般に

$$\rho_n(\alpha') \sim \exp[-n\sigma(\alpha')] \tag{6}$$

なる漸近形を持つ。

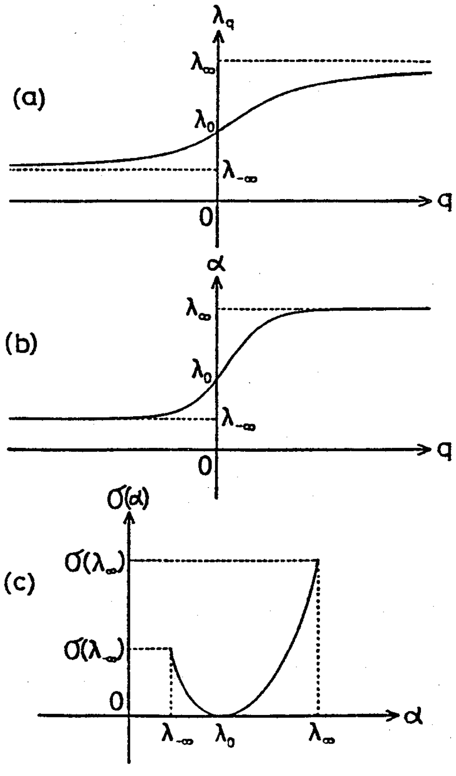
λ_q と $\sigma(\alpha)$ の α 依存性の間は Legendre 変換

$$\alpha = \frac{d}{dq}(q\lambda_q) \tag{7}$$

$$\sigma(\alpha) = q^2 \frac{d\lambda_q}{dq} \tag{8}$$

$$\lambda_q = \alpha - q^{-1}\sigma(\alpha) \tag{9}$$

で結びついている。これらの式は平衡統計力学における温度 (q^{-1}), 内部エネルギー (α), エントロピー ($\sigma(\alpha)$), および Helmholtz の自由エネルギー (λ_q) との間の熱力学的関係式を与える。これらの schematic な q 或いは α 依存性については図を参照。



図

本研究における特性関数 λ_q や $\sigma(\alpha)$ の導入は, fractality の概念とは直接関係なく, その意味でもっと広範囲の対象に適用できる。[4] Halsey 等[2] や Parisi[3] 等の fractal measure theory も

このような新しい自己相似性の観点からとらえることができ,[1] それらの間には表のような簡単な関係がある。λ_q の q の領域による漸近形およびその物理的な意味については文献4)を,$\sigma(\alpha)$ の漸近形については文献1)を参照していただきたい。

表

Equilibrium Statistical Mechanics	Strange Sets	Time Series	Velocity Structure Functions in Turbulence
N particle number	$\ln(1/\ell)$	n	$\ln(1/r)$
e^{-E} E : total energy	p_i^{-1}	e^{X_n} $(X_n \equiv \Sigma_{j=0}^{n-1} u_j)$	$\Delta V(r)$
$\beta(=1/k_B T)$ inverse temperature	$1-q$	q	p
$\int \Omega_N(E) e^{-\beta E} dE$ partition function	$\Sigma_i p_i^q$ $(\equiv \langle (p_i^{-1})^{1-q} \rangle)$	$\langle [e^{X_n}]^q \rangle$	$\langle [\Delta V(r)]^p \rangle$
f Helmholtz free energy	D_q	λ_q	$\frac{-\zeta_p}{p}$
$\frac{d}{d\beta}(\beta f) \equiv u$ internal energy	$\frac{d}{d(1-q)}[(1-q)D_q]$ $(\equiv \alpha)$	$\frac{d}{dq}(q\lambda_q)$ $(\equiv \alpha)$	$\frac{d}{dp}(p \cdot \frac{-\zeta_p}{p})$ $(\equiv -h)$
$-\frac{df}{d\beta^{-1}} \equiv s(u) \geqq 0$ entropy/k_B	$-\frac{dD_q}{d(1-q)^{-1}}$ $(\equiv \alpha - f(\alpha) \geqq 0)$	$-\frac{d\lambda_q}{dq^{-1}}$ $(\equiv \sigma(\alpha) \geqq 0)$	$-\frac{d}{dp^{-1}}(\frac{-\zeta_p}{p})$ $(\equiv 3-d(h) \geqq 0)$
$\frac{ds(u)}{du} = \beta$	$\frac{d(\alpha - f(\alpha))}{d\alpha} = 1-q$	$\frac{d\sigma(\alpha)}{d\alpha} = q$	$\frac{d(3-d(h))}{d(-h)} = p$
$f = u - \frac{s(u)}{\beta}$	$D_q = \alpha - \frac{\alpha - f(\alpha)}{1-q}$	$\lambda_q = \alpha - \frac{\sigma(\alpha)}{q}$	$\frac{-\zeta_p}{p} = -h - \frac{3-d(h)}{p}$
$\frac{du}{d\beta^{-1}} > 0$	$\frac{d\alpha}{d(1-q)^{-1}} < 0$	$\frac{d\alpha}{dq^{-1}} < 0$	$\frac{d(-h)}{dp^{-1}} < 0$
$\frac{d^2 s(u)}{du^2} < 0$	$\frac{d^2(\alpha - f(\alpha))}{d\alpha^2} > 0$	$\frac{d^2\sigma(\alpha)}{d\alpha^2} > 0$	$\frac{d^2(3-d(h))}{d(-h)^2} > 0$

文　献

1) H. Fujisaka and M. Inoue: preprint (Statistical-Thermodynamic Formalism of Self-Similarity)

2) 例えば, T. C. Halsey et al.: Phys. Rev. **A33** (1986) 1141.

3) U. Frisch and G. Parisi: in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics,* International School of Physics, "Enrico Fermi", Course LXXXVIII, p. 84.

4) H. Fujisaka and M. Inoue: Prog. Theor. Phys. **74** (1985) 20.

5) M. Inoue and H. Fujisaka: preprint (Analytic Properties of Characteristic Exponents for Chaotic Dynamical Systems).